



# Optimisation à base de flot de graphe pour l'acquisition d'informations 3D à partir de séquences d'images

Sylvain Paris, François X. Sillion

## ► To cite this version:

Sylvain Paris, François X. Sillion. Optimisation à base de flot de graphe pour l'acquisition d'informations 3D à partir de séquences d'images. AFIG '02 (Actes des 15èmes journées de l'AFIG), AFIG, 2002, Lyon, France. inria-00510038

**HAL Id: inria-00510038**

**<https://inria.hal.science/inria-00510038>**

Submitted on 17 Aug 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Optimisation à base de flot de graphe pour l’acquisition d’informations 3D à partir de séquences d’images

Sylvain Paris, François Sillion

iMAGIS - GRAVIR / IMAG - INRIA <sup>†</sup>

655, avenue de l’Europe, Montbonnot 38334 Saint Ismier CEDEX

{sylvain.paris|francois.sillion}@imag.fr

**Résumé :** *On se propose de montrer comment on peut appliquer la technique de “flot de graphe” pour résoudre certains problèmes complexes d’optimisation. Cette technique est utilisée pour l’acquisition d’informations 3D à partir de plusieurs points de vue. On montre notamment comment – grâce à un graphe particuliers – il est possible de minimiser une famille d’énergies qui permettent d’atteindre des résultats plus précis que les cartes de disparité obtenues jusqu’à présent sur ce type de problème. Cette nouvelle approche offre aussi la possibilité de prendre en compte les discontinuités des objets avec lesquels on souhaite travailler. Les résultats ainsi obtenus sont exposés.*

**Mots-clés :** Flot de graphe, coupure de graphe, optimisation, reconstruction 3D

## 1 Introduction

Nous nous sommes intéressés au problème de l’acquisition d’informations tridimensionnelles à partir d’une courte séquence d’images. Notre objectif est de “remplir” des environnements virtuels auxquels manquent la plupart du temps les petits détails essentiels au réalisme comme une boîte aux lettres, un banc public ou des passants. Ce sont ces objets dont nous souhaitons obtenir un modèle à l’aide de la séquence.

Au cours de notre algorithme, nous devons déterminer la position de la surface des objets de manière à ce que cette surface soit cohérente par rapport aux images de la séquence tout en présentant une certaine régularité car la plupart des objets ont une surface lisse – au moins localement. Ce type de compromis se représente classiquement sous forme d’une fonction d’énergie qui contient un terme en rapport avec la régularité et un terme en rapport avec la cohérence. Pour le terme de régularité nous avons choisi une pénalité sur les dérivées de la surface et nous obtenons le terme de cohérence des étapes précédentes de notre algorithme qui est décrit dans [PS02]. Or il se trouve que ce terme a a priori très peu de propriétés mathématiques qui peuvent servir de base aux techniques classiques d’optimisation. Les techniques à base de flot de graphe sont alors apparues comme une solution à ce problème. Nous allons donc présenter une technique d’optimisation adaptée à une famille d’énergies qui englobe notre problème.

Dans la section 2 nous allons observer les principaux travaux existants sur le problème de la reconstruction 3D pour examiner quelle technique d’optimisation est employée en nous attardant sur les techniques à base de flot de graphe. Ensuite dans la section 3 nous introduirons la notion de flot de graphe. Nous continuerons dans la section 4 en présentant comment cette notion peut être utile pour résoudre des problèmes d’optimisation. Dans la section 5 nous étudierons l’application de cette technique à notre problème d’acquisition d’informations 3D. Nous finirons par la section 6 où l’on présente quelques résultats et par la section 7 qui conclue cet article.

## 2 Travaux existants

Toute une famille de méthodes de reconstruction est basée sur la discrétisation de l’espace en voxels ; la plus connue est le *Space Carving* introduit par Kutulakos et Seitz [KS99] dont de nombreuses variantes ont été dérivées. Pour plus de détails, on pourra lire le tour d’horizon proposé par Slabaugh et al. [SCMS01] qui regroupe la plupart d’entre elles. Pour toutes ces méthodes, l’évaluation de la présence ou non d’un voxel se fait uniquement selon la cohérence par rapport aux images, aucune contrainte de régularité n’est prise en compte il n’y a donc aucune

---

<sup>†</sup> iMAGIS est un projet commun CNRS, INPG, INRIA, UJF.

optimisation d'effectuée. Ces techniques sont donc très sensibles à la qualité des images initiales et à l'ambiguïté résultant du faible angle de vue dont nous disposons dans nos courtes séquences d'images.

On peut ensuite citer les techniques travaillant le long des lignes épipolaires pour créer des cartes de disparité [OK93, OK85, IB94, UKG98]. Ces méthodes introduisent naturellement des contraintes de régularité le long de des lignes épipolaires et obtiennent ainsi des résultats même pour un faible angle de vue. Néanmoins elles présentent deux restrictions principales : il est difficile d'introduire une régularité entre deux lignes épipolaires et les cartes de disparité obtenues ont une faible précision en profondeur, les objets reconstruits sont généralement plats. Koch et al. [KPV98] améliorent la précision en utilisant un filtre de Kalman mais n'introduisent toujours pas de régularité entre lignes épipolaires.

Faugeras et Keriven [FK98] proposent une méthode à base de courbes de niveaux qui fait évoluer une surface dans l'espace de manière à s'approcher de plus en plus de la surface de l'objet à reconstruire. Grâce aux courbes de niveaux, cette technique optimise un compromis entre la cohérence par rapport aux images et la régularité de la surface finale. Néanmoins, elle nécessite des images de très bonne qualité et des points de vue très distants pour obtenir des résultats satisfaisants.

Viennent ensuite les méthodes à base de flots de graphes. Roy et Cox [RC98] ont introduit leur technique comme une généralisation des méthodes travaillant sur les lignes épipolaires pour construire des cartes de disparités. Leur méthode montre qu'un flot de graphe permet d'étendre le processus d'optimisation à toute l'image. Ils constatent aussi que leur processus a des propriétés de régularisation similaires aux techniques à base de lignes épipolaires. Cette technique a été par la suite formalisée par Veksler [Vek99] puis Kolmogorov et Zabih [KZ01, KZ02a, KZ02b] sous la forme d'un problème de labellisation visant à construire une carte de disparité. Chaque label est une valeur de disparité possible. Un label est associé à chaque pixel de manière à minimiser une énergie qui tient compte du voisinage du pixel pour avoir un résultat final régulier. Ces méthodes ont deux limitations, la première est qu'elles construisent des cartes de disparité qui ont toujours le défaut d'aplatir les objets ; la seconde est que, comme la fonction de pénalité entre deux voisins de labels différents n'est pas nécessairement convexe, la minimisation de l'énergie est un problème NP-complet dont on obtient finalement qu'une approximation. Par contre, Ishikawa [Ish00] propose l'étude du cas où cette fonction est convexe et décrit un graphe qui permet d'obtenir le résultat exact. Toutefois la méthode de stéréovision qu'il expose ne peut pas se généraliser aisément à une séquence d'images et n'utilise qu'une pénalité linéaire. Une méthode pour utiliser trois caméras a été proposée par Buehler et al. [BGCM02] mais celle-ci ne s'étend pas non plus à une séquence d'images.

### **Contribution**

La technique que nous allons décrire se propose de formuler le problème d'optimisation sous une forme nouvelle qui exhibe le rôle de la configuration géométrique et d'y adapter une méthode de flot de graphe qui tire partie des fonctions de pénalité convexes. Ainsi il sera possible de travailler à partir de séquences d'images et d'obtenir des modèles plus précis que les cartes de disparités produites jusqu'à présent.

## **3 Flot de graphe**

Le problème du flot de graphe est un problème classique d'algorithmique. Initialement, il s'agit de la formulation d'un problème simple d'écoulement d'eau dans un réseau de tuyaux. On présente dans un premier temps ce problème pour donner l'intuition de ce que représente la formulation théorique qui suit.

### **3.1 Écoulement d'eau dans un réseau**

Le problème que l'on se pose est le suivant. Étant donnés une source d'eau de débit infini, un puits de contenance infinie et un réseau de tuyaux reliant la source au puits, on cherche le flot maximum que l'on peut faire passer à travers le réseau. Comme le débit de la source et la contenance du puits sont infinis, le flot maximum est uniquement contraint par le réseau. Intuitivement, on peut voir le réseau comme un barrage entre la source et le puits qui ne laisse passer qu'un certain débit.

Si maintenant on cherche à comprendre pourquoi le réseau restreint le flot, on peut se convaincre que le réseau contient un goulot d'étranglement. Considérons un ensemble de tuyaux qui sépare la source du puits. Pour aller de la source au puits, l'eau doit nécessairement emprunter l'un de ces tuyaux. Donc dans le meilleur des cas, si tous

ces tuyaux sont pleins d'eau, le flot sera égal à la somme de leurs capacités. Le goulot d'étranglement correspond alors à un ensemble de tuyaux qui sépare la source du puits dont la somme des capacités est minimale.

Remarquons, pour finir avec cet exemple, que si le flot est maximum à travers le réseau, on est dans le cas où tous les tuyaux du goulot d'étranglement sont pleins. La valeur du flot maximum est par conséquent égale à la capacité minimale d'un ensemble séparateur. Trouver l'une ou l'autre de ces valeurs sont donc deux problèmes liés.

### 3.2 Formulation théorique

On considère un graphe orienté connexe  $\mathcal{G}$  composé d'un ensemble de sommets  $\mathcal{S}$  et d'un ensemble d'arcs orientés  $\mathcal{A} \in \mathcal{S}^2$ . On distingue deux sommets particuliers : la *source*  $s$  et le *puits*  $p$ . Pour un sommet  $x$ , on définit l'ensemble des arcs *entrants*  $\mathcal{A}_e(x)$  et celui des arcs *sortants*  $\mathcal{A}_s(x)$  :

$$\mathcal{A}_e(x) = \{a \in \mathcal{A} / \exists y \in \mathcal{S}, a = (y, x)\}$$

$$\mathcal{A}_s(x) = \{a \in \mathcal{A} / \exists y \in \mathcal{S}, a = (x, y)\}$$

On définit une fonction *capacité* qui associe à un arc  $a$  un réel positif  $Cap(a)$  et une fonction *flot* qui lui associe un autre réel positif  $Flot(a)$ . On dit que le flot est *valide* si :

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad Flot(a) \leq Cap(a) \quad (3.1)$$

$$\forall x \in \mathcal{S} \setminus \{s, p\} \quad \sum_{a_e \in \mathcal{A}_e(x)} Flot(a_e) = \sum_{a_s \in \mathcal{A}_s(x)} Flot(a_s) \quad (3.2)$$

$s$  et  $p$  étant exclus de la contrainte 3.2, pour simplifier la suite des définitions, on suppose  $\mathcal{A}_e(s) = \mathcal{A}_s(p) = \emptyset$ .

Dans l'exemple précédent,  $\mathcal{G}$  est le réseau,  $\mathcal{A}$  l'ensemble des tuyaux et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des jonctions entre tuyaux. La fonction de capacité indique le débit maximum dans tuyau, celle de flot donne le flot effectif dans un tuyau. Le flot est valide si toute l'eau qui arrive à une jonction en repart (équation (3.2)) et si le flot dans un tuyau n'est pas supérieur à son débit maximum (équation (3.1)).

À partir de maintenant, on ne considère plus que des flots valides.

À une fonction de flot donnée, on associe une valeur que l'on appellera *flot de graphe* (ou simplement *flot* si cela ne prête pas à ambiguïté) :

$$Flot(\mathcal{G}) = \sum_{a \in \mathcal{A}_s(s)} Flot(a) \quad (3.3)$$

On définit une *coupure*  $\mathcal{C}_\mathcal{G}$  de  $\mathcal{G}$  comme la partition de  $\mathcal{S}$  en deux ensembles connexes  $\mathcal{S}_s$  et  $\mathcal{S}_p$  tels que  $s \in \mathcal{S}_s$  et  $p \in \mathcal{S}_p$ . On associe à cette coupure une valeur  $Coup(\mathcal{C}_\mathcal{G})$  (que l'on appellera aussi *coupure* quand cela ne crée pas d'ambiguïté) :

$$Coup(\mathcal{C}_\mathcal{G}) = \sum_{(x,y) \in (\mathcal{S}_s \times \mathcal{S}_p)} Cap(x, y) \quad (3.4)$$

et on dira qu'un arc  $(x, y)$  est *coupé* si  $(x, y) \in (\mathcal{S}_s \times \mathcal{S}_p)$ .

Par la suite, on s'intéressera à la coupure de valeur minimale. Pour cela, on a le théorème suivant qui constituera la base de la méthode proposée.

**Théorème “Flot maximum - coupure minimale”** : Étant donnés un graphe  $\mathcal{G}$ , une source  $s$ , un puits  $p$  et une fonction de capacité  $Cap$ , on a la relation suivante entre le flot maximal atteint sur l'ensemble des fonctions de flot valides et la coupure de valeur minimale :

$$\max Flot(\mathcal{G}) = \min Coup(\mathcal{C}_\mathcal{G}) \quad (3.5)$$

Par rapport à l'exemple initial, ce théorème est simplement la formalisation du fait qu'il ne peut pas passer plus d'eau à travers le réseau que le goulot d'étranglement ne le permet.

On trouvera la démonstration du théorème dans [FF62]. L'intérêt majeure de ce résultat est de montrer qu'en utilisant des algorithmes qui calculent le flot maximum [GR97, CG97] on a accès à la coupure minimale.

## 4 Minimisation d'énergie

L'idée à la base de la méthode que l'on propose est de créer un graphe de manière à ce qu'une coupure représente une fonction et la valeur de cette coupure représente une énergie associée à cette fonction. En trouvant la coupure minimale, on aura donc calculé la fonction qui minimise cette énergie. On commence par un exemple simple pour illustrer le concept. On étudie ensuite les cas à deux dimensions et à trois dimensions.

### 4.1 Exemple simple

Prenons trois points  $x_1, x_2$  et  $x_3$ , une fonction  $f$  qui peut prendre deux valeurs  $y_1$  et  $y_2$ . Pour définir une énergie sur  $f$ , on introduit une fonction de coût  $c(x, y) > 0$  qui représente l'énergie du choix  $f(x) = y$  et une fonction de pénalité  $p(f(x_i), f(x_{i+1}))$  pour  $i \in \{1, 2\}$  qui représente notre souhait d'avoir des valeurs de  $f$  similaire pour des points proches.  $p(f(x_i), f(x_{i+1}))$  est nulle si  $f(x_i) = f(x_{i+1})$  et vaut  $p_0 > 0$  sinon.

On cherche  $f$  qui minimise :

$$\mathcal{E}(f) = \sum_{i=1}^3 c(x_i, f(x_i)) + \sum_{i=1}^2 p(f(x_i), f(x_{i+1})) \quad (4.1)$$

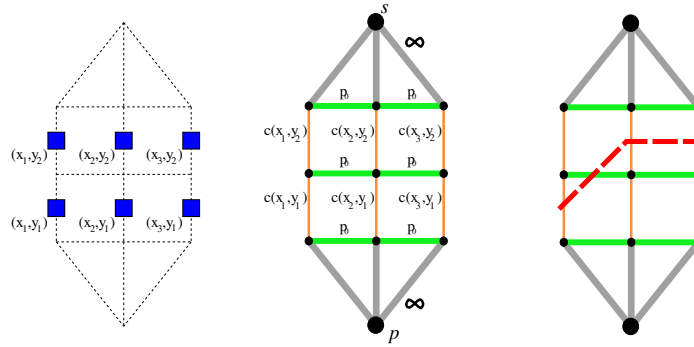


FIG. 1 – Un graphe simple. À gauche, les positions possibles pour  $f$  et la structure du graphe en pointillés (les positions sont associées à des arcs verticaux). Au milieu, le graphe avec les capacités des arcs. À droite, un exemple de coupure.

On construit un graphe tel qu'indiqué sur la figure 1. La base du graphe est une grille dont les arcs sont bidirectionnels. À chaque position  $(x, y)$  on associe un arc vertical avec la capacité  $c(x, y)$ , les arcs horizontaux correspondent à la fonction de pénalité. Les arcs qui relient la source à la grille et la grille au puits ont une capacité infinie.

Si on étudie maintenant une coupure pour ce graphe (figure 1-droite), on peut faire les remarques suivantes :

- si elle coupe un arc qui est lié à la source ou au puits, elle aura une valeur infinie donc ne sera pas minimale ;
- si on exclut ces coupures infinies, comme une coupure crée une partition des sommets, elle doit forcément passer par au moins un arc dont l'abscisse est  $x_i$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$  ;
- une coupure minimale ne coupe qu'un seul arc d'abscisse  $x_i$  car une coupure coupant deux tels arcs aura une valeur plus élevée que si elle ne coupait que l'un des deux.

Une coupure qui satisfait ces trois remarques est dite *potentiellement minimale* : elle ne coupe aucun arc infini et ne coupe qu'un et un seul arc d'abscisse  $x_i$ .

Par conséquent, on peut construire une fonction  $f$  à partir d'une coupure potentiellement minimale : à partir de chaque arc  $(x_i, y_j)$  on déduit un point  $f(x_i) = y_j$ . Inversement, à partir d'une fonction  $f$ , on construit une coupure potentiellement minimale en coupant uniquement les arcs  $(x_i, y_j)$  tels que  $f(x_i) = y_j$ . Observons pour finir, la valeur d'une telle coupure : les arcs verticaux coupés forment exactement la somme  $\sum_{i=1}^3 c(x_i, f(x_i))$  et les arcs horizontaux coupés la somme  $\sum_{i=1}^2 p(f(x_i), f(x_{i+1}))$  de l'énergie (4.1).

En conclusion, en calculant la coupure minimale du graphe en figure 1, on trouve la fonction  $f_0 = \operatorname{argmin}_f \mathcal{E}(f)$ .

Avant de passer à un cas plus complexe, observons quelques points importants.

- Nous avons un calcul direct du résultat, nous n'avons utilisé aucune technique type descente de gradient susceptible de se bloquer dans un minimum local. Nous sommes assurés d'avoir le minimum global de l'énergie.

- On peut exprimer la pénalité  $p_0$  sous la forme  $\alpha \left| \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_i} \right|$  ce qui offre une interprétation géométrique de la pénalité : on pénalise proportionnellement à la pente de  $f$ .
- La fonction de pénalité  $p$  et le coefficient  $\alpha$  peuvent aussi être fonction de  $x_i$ . Cela permet d'introduire des contraintes plus souples, on peut affecter par exemple une pénalité plus importante au cas  $f(x_1) \neq f(x_2)$  qu'au cas  $f(x_2) \neq f(x_3)$  ce qui se traduit par  $\alpha(x_1) > \alpha(x_2)$ .

## 4.2 Étude en deux dimensions

Après cet exemple simple, nous pouvons étendre la méthode à une fonction plus générale en deux dimensions. Considérons une fonction  $f$  réelle d'un intervalle  $[a, b]$  dans un intervalle  $[c, d]$ , une fonction de coût  $c(x, y)$  et un coefficient de pénalité  $\alpha(x)$ . On définit de manière similaire une énergie  $\mathcal{E}$  qui est d'autant plus faible que la fonction  $f$  prend des valeurs de faible coût tout en ayant des valeurs voisines proches les unes des autres.

$$\mathcal{E}(f) = \int_a^b \left( c(x, f(x)) + \alpha(x) \left| \frac{df}{dx}(x) \right| \right) dx \quad (4.2)$$

Nous allons montrer comment trouver la fonction  $f_0$  qui minimise cette énergie à une discrétisation près. En effet, comme nous utilisons des graphes, nous ne pouvons traiter que des cas discrets. Néanmoins, il est toujours possible de discrétiser plus finement pour obtenir des résultats plus précis. Nous découpons par conséquent l'intervalle  $[a, b]$  en  $n_x - 1$  sous-intervalles de même longueur  $\Delta x$  pour obtenir  $n_x$  points  $x_1, x_2, \dots, x_{n_x}$ . Nous faisons de même pour  $[c, d]$  pour obtenir  $n_y$  points  $y_1, y_2, \dots, y_{n_y}$  espacés de  $\Delta y$ . L'énergie discrète correspondant à (4.2) est alors :

$$\mathcal{E}^d(f) = \sum_{i=1}^{n_x} c(x_i, f(x_i)) + \sum_{i=1}^{n_x-1} \alpha(x_i) \left| \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x} \right| \quad (4.3)$$

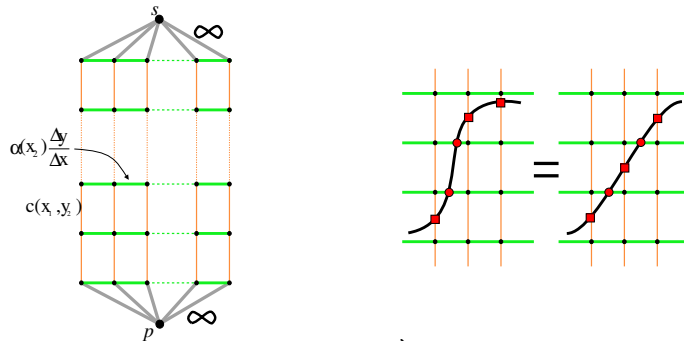


FIG. 2 – À gauche : graphe correspondant à l'énergie (4.3). À droite : situation où deux coupures ont exactement la même valeur : trois arcs de coût (les carrés) et 2 arcs de pénalité (les ronds).

On obtient une énergie très similaire à celle obtenue en (4.1). On procède par conséquent de la même manière : on utilise un graphe basé sur une grille (figure 2-gauche) où les arcs verticaux représentent la fonction de coût  $c(x, y)$  et les arcs horizontaux la pénalité  $\alpha(x) \frac{\Delta y}{\Delta x}$  pour les valeurs distinctes. On introduit de manière totalement similaire les *coupures potentiellement minimales* et on leur associe à chacune une fonction  $f$ . La conclusion étant que la fonction  $f_0$  associée à la coupure minimale réalise :  $f_0 = \operatorname{argmin}_f \mathcal{E}^d$ .

Observons à nouveau quelques détails sur la méthode.

- Ce problème se résout très bien grâce à la programmation dynamique [Bel57], il ne s'agit encore que d'un cas d'étude.
- La formulation (4.2) exhibe la géométrie du problème : l'élément d'intégration  $dx$  explicite la mesure employée. Si on change la configuration géométrique – par un changement d'échelle par exemple – il est aisé de recalculer les différentes grandeurs de (4.3) en fonction de cette nouvelle configuration.
- La seule contrainte pour la fonction de coût est de pouvoir la discrétiser donc qu'elle soit continue par morceaux.
- En regardant l'énergie (4.2), la fonction  $f_0$  doit être continûment dérivable sauf sur les points où  $\alpha(x) = 0$ .
- Comme précédemment, on trouve un minimum global de manière certaine.
- On a montré la méthode sur un domaine 2D rectangulaire mais il est tout à fait possible de travailler sur un domaine plus général. Il suffit alors de discrétiser ce domaine selon une grille et de relier les nœuds de la limite supérieure à la source et ceux de la limite inférieure au puits.

- Comme la pénalité est simplement proportionnelle à la pente de la coupure, dans les zones où les fonctions de coût et de pénalité sont constantes, on peut trouver plusieurs coupures de même valeur car un palier ou une pente “douce” ont la même énergie (figure 2-droite). A priori, vu que l’on impose une pénalité aux valeurs distinctes, on souhaite obtenir la pente douce alors qu’en pratique les algorithmes donnent toujours le palier.

### Une pénalité non-linéaire

La dernière remarque soulève un problème important : on obtient des paliers malgré l’introduction dans l’énergie d’une composante visant à limiter les variations de la fonction solution. La linéarité de la pénalité est à l’origine de ce phénomène car elle ne différencie pas une importante variation de plusieurs petites. Nous proposons par conséquent une structure de graphe permettant une pénalité strictement convexe : il sera alors plus pénalisant pour la fonction de faire un palier que de faire une variation régulière. Ishikawa [Ish00] propose une méthode générale pour obtenir une fonction de pénalité convexe à une constante près sur la pénalité, ce qui ne peut être gênant que dans le cas d’un échantillonnage irrégulier. Nous proposons toutefois une autre méthode qui n’introduit pas de constante sur la pénalité et suffit à avoir une fonction de pénalité strictement convexe.

Le graphe est construit à partir de l’élément de base de la figure 3 : l’arc vertical de coût est remplacé par quatre arcs *mineurs* de capacité moitié et on introduit un nouveau coefficient de pénalité  $\beta$  dit *secondaire*. Il correspond à la capacité des arcs de pénalités reliant les milieux de deux arcs verticaux adjacents. On appellera  $\alpha$  le coefficient *principal* pour éviter les ambiguïtés.

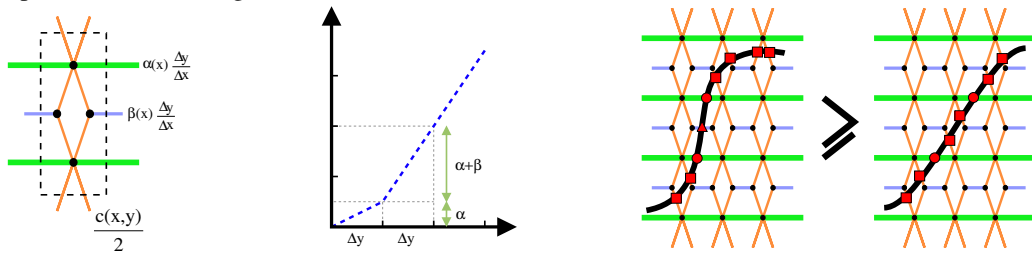


FIG. 3 – À gauche : l’élément de base utilisé. Au milieu : la fonction de pénalité  $p_{conv}$  correspondante. À droite : une variation continue est moins pénalisée qu’un palier : elle coupe une pénalité secondaire de moins (triangle).

Le processus qui permet d’obtenir une fonction de pénalité  $p_{conv}$  strictement convexe est le suivant : si lors d’un pas unitaire  $\Delta x$ , la fonction varie de  $q$  pas  $\Delta y$ , la coupure coupe seulement  $q - 1$  arcs principaux (ou aucun si  $q \leq 1$ ) et  $q$  arcs secondaires car elle peut “passer au milieu des arcs de coût mineurs” (voir la figure 3-droite). On obtient donc la fonction de pénalité  $p_{conv}$  de la figure 3-milieu. On notera que l’on coupe toujours les arcs de coût mineur par paire, ce qui rétablit la fonction de coût initiale.

On a finalement construit un graphe qui permet de calculer l’énergie :

$$\mathcal{E}_{conv}^d(f) = \sum_{i=1}^{n_x} c(x_i, f(x_i)) + \sum_{i=1}^{n_x-1} p_{conv} \left( \left| \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x} \right| \right) \quad (4.4)$$

Grâce à  $\mathcal{E}_{conv}^d$ , les variations progressives sont maintenant favorisées par rapport aux paliers. Il faut néanmoins remarquer les points suivants.

- Avec le graphe tel qu’il est présenté, il peut être moins pénalisant pour une coupure de couper deux arcs de coût mineurs que de couper un arc de pénalité secondaire. Pour éviter ce problème, on peut soit ajouter une constante à la fonction de coût, ce qui présente les mêmes restrictions qu’une constante sur la fonction de pénalité, soit utiliser les *arcs de contrainte* proposés par Ishikawa[Ish00] qui permettent d’éliminer cette constante.
- L’énergie  $\mathcal{E}_{conv}^d$  n’a pas directement d’équivalent en continu car  $p_{conv}$  dépend du pas de discrétisation. Toutefois, si  $\beta = 0$ ,  $\mathcal{E}_{conv}^d = \mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_{conv}^d$  correspond alors à  $\mathcal{E}$ . On peut donc avoir une approximation discrète de  $\mathcal{E}$  qui favorise les variations progressives aussi bonne que l’on souhaite en prenant  $\beta$  aussi petit que nécessaire.

### 4.3 Étude en trois dimensions

Pour le cas en trois dimensions, on cherche une fonction  $f$  définie sur un rectangle  $[a_x, b_x] \times [a_y, b_y]$ , qui prend ses valeurs dans  $[c, d]$  et qui minimise l’énergie :

$$\mathcal{E}(f) = \int_{a_x}^{b_x} \int_{a_y}^{b_y} \left( c(x, y, f(x, y)) + \alpha_x(x, y) \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \alpha_y(x, y) \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right) dx dy \quad (4.5)$$

Nous proposons un procédé totalement équivalent au cas en deux dimensions, nous utilisons simplement une grille en trois dimensions comme base du graphe. Les restrictions à un plan  $x = C_x$  ou  $y = C_y$  (avec  $C_x$  et  $C_y$  constantes) sont simplement des graphes à deux dimensions tels que présentés précédemment. Pour une pénalité linéaire, on obtient par conséquent l'élément de base de la figure 4-gauche. Cette pénalité donne toujours des paliers dans les résultats, on préfère utiliser une approximation par une pénalité strictement convexe, ce qui conduit à l'élément décrit dans la figure 4-droite. On note simplement que maintenant les arcs de coût mineurs sont coupés par groupes de quatre, ce qui implique qu'ils aient une capacité  $\frac{1}{4}c(x, y, z)$ .

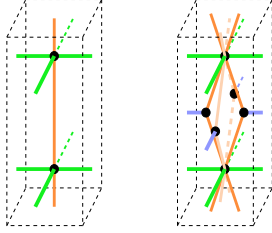


FIG. 4 – Gauche : l'élément de base utilisé pour une pénalité linéaire. Droite : pour une pénalité convexe.



FIG. 5 – Exemple de cartes de discontinuité utilisées (gauche :  $\alpha_x$ , droite :  $\alpha_y$ )

Il est important de noter les deux points suivants qui n'apparaissent pas dans les études précédentes :

- le procédé est anisotrope car il dépend des axes  $x$  et  $y$ ,
- le problème que l'on résout n'a plus de solution avec des techniques de programmation dynamique. La discussion n'entre pas dans le cadre de cet article, l'idée sous-jacente étant que la fonction est définie sur deux variables et que cela empêche un parcours récursif de l'espace des fonctions solutions.

#### 4.4 Extensions

La méthode présentée permet quelques extensions utiles que l'on présente mais pour lesquelles on ne donne pas de détails techniques par soucis de concision.

**$D + 1$  dimensions :** De façon totalement similaire, on peut trouver des fonctions à  $D$  variables minimisant des énergies dans un espace à  $D + 1$  dimensions.

$$\mathcal{E}(f) = \int \left( c(X, f(X)) + \sum_{i=1}^D \alpha_{x_i}(X) \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \right| \right) dX \quad \text{avec } X = (x_1, x_2, \dots, x_D)$$

**Fonctions périodiques :** On peut traiter des fonctions périodiques (selon  $x$  par exemple) simplement ajoutant des arcs de pénalité entre les noeuds d'abscisse  $n_x$  et ceux d'abscisse 1.

**Différentes mesures :** On peut utiliser d'autres mesures. Pour une fonction définie en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  par exemple, l'élément d'intégration est  $r dr d\theta dz$ , on peut distribuer le  $r$  sur les fonctions de coût et de pénalité et se ramener au cas d'une fonction périodique en  $\theta$ .

**Approximation locale :** L'algorithme de résolution de flot n'étant pas linéaire par rapport aux nombres de noeuds de la grille, il peut être utile d'avoir une approximation linéaire du résultat. Pour cela, pour chaque point  $X$  où est définie la fonction  $f$  on résout le problème d'optimisation sur un voisinage de  $X$  et on associe à  $f(X)$  la valeur ainsi trouvée. On ne donnera pas ici l'étude complète de cette approximation, on notera simplement que sur des cas pratiques de taille moyenne, les temps de calcul sont similaires au calcul exact. On réservera donc cette approximation au problème de taille importante.

## 5 Application à la reconstruction 3D

On se propose d'appliquer la méthode d'optimisation proposée dans le cadre de l'algorithme de reconstruction 3D décrit dans [PS02]. On ne décrira pas l'ensemble de l'algorithme mais uniquement le cadre dans lequel nous utilisons le flot de graphe.



## 5.1 Contexte d'utilisation

La reconstruction que nous proposons travaillent à partir d'une courte séquences d'images très proches les unes des autres. Comme la séquence est courte, l'angle de vue sur les objets à reconstruire est très faible et induit une forte ambiguïté sur la profondeur des points reconstruits. Comme la méthode d'optimisation à base de graphes trouve le minimum global, nous arrivons à lever cette ambiguïté.

En pratique, nous travaillons dans un ensemble de voxels qui constitue la discrétisation de l'espace nécessaire à notre méthode. À chaque voxel  $(x, y, z)$ , nous avons associé une valeur  $V(x, y, z)$  qui est d'autant plus faible que le voxel est vu de manière similaire dans toutes les images. Dans l'hypothèse d'objets lambertiens, nous recherchons les faibles valeurs de  $V$  car alors la couleur d'un objet ne dépend pas du point de vue. Toutefois les images d'entrée n'ayant pas nécessairement une qualité parfaite et à cause de l'ambiguïté sur la profondeur déjà évoquée, nous ne pouvons prendre comme surface de l'objet reconstruit la surface qui minimise uniquement  $V$  car elle risque d'être fortement discontinue. Il faut introduire un terme de régularisation et ainsi obtenir une surface qui à la fois est cohérente par rapport aux images et possède une certaine continuité. Nous sommes donc dans le cadre de l'optimisation présentée.

Pour finir, nous n'imposons pas une contrainte de continuité sur l'ensemble de la surface reconstruite car l'objet reconstruit peut très bien présenter des discontinuités. Grâce à l'éclairage, nous savons que ces discontinuités engendrent des variations d'ombrage donc des variations de couleur dans les images. Nous relâchons donc les contraintes de continuité le long des lignes de changement de couleur.

## 5.2 Application de la méthode

Tout d'abord, l'utilisateur fixe une pénalité de discontinuité  $\alpha_{max}$  qui doit être appliquée sur les zones de couleur uniforme. Ensuite, à partir des images initiales, nous détectons les discontinuités de couleur horizontales et verticales et construisons ainsi les fonctions de pénalité  $\alpha_x$  et  $\alpha_y$  (figure 5) qui évoluent entre 0 (sur les fortes discontinuités de couleur) et  $\alpha_{max}$  (dans les zones de couleur uniforme). Une fois que nous avons ces deux fonctions, nous pouvons adapter l'énergie (4.2) à notre besoin, avec  $V$  comme fonction de coût et  $\mathcal{D}$  le support de la fonction recherchée :

$$\mathcal{E}(f) = \iint_{\mathcal{D}} \left( V(x, y, f(x, y)) + \alpha_x(x, y) \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right| + \alpha_y(x, y) \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \right) dx dy \quad (5.1)$$

## 5.3 Améliorations obtenues

Sans cette méthode qui permet d'optimiser la position de la surface dans son ensemble, nous étions obligés de procéder à une optimisation "ligne par ligne" comme beaucoup d'autres méthodes [OK85, OK93, IB94, KPV98, UKG98]. Cela nous obligeait à avoir de forts traitements dans la suite du processus pour assurer une régularité d'une ligne à l'autre. Cela avait pour conséquence de "gommer" de nombreux détails de la surface de l'objet (le nez sur un visage par exemple).

Maintenant les traitements qui suivent sont beaucoup plus restreints : on se contente de former une surface à partir de la fonction solution et de la lisser légèrement pour supprimer l'aliasage dû à la discrétisation. Les petits détails sont ainsi conservés.

De plus, le "découpage" en ligne introduisait arbitrairement une séparation entre les directions  $x$  et  $y$  qui subissaient des traitements différents au cours du processus de reconstruction. Maintenant, ces deux directions sont traitées de manière équivalente ce qui est plus satisfaisant.

## 6 Résultats

La figure 6 illustre les résultats obtenus sur trois séquences d'images différentes. Pour juger de ces résultats, il est important de noter la résolution des images utilisées. Par exemple, le visage de l'homme ne couvre dans chaque image qu'une surface d'environ  $40 \times 40$  pixels. Malgré cela, on remarquera les nombreux détails qui apparaissent

dans les modèles géométriques : les touches du clavier, les plis du lampion, le nez de l'homme, le contenu de sa malette, etc.

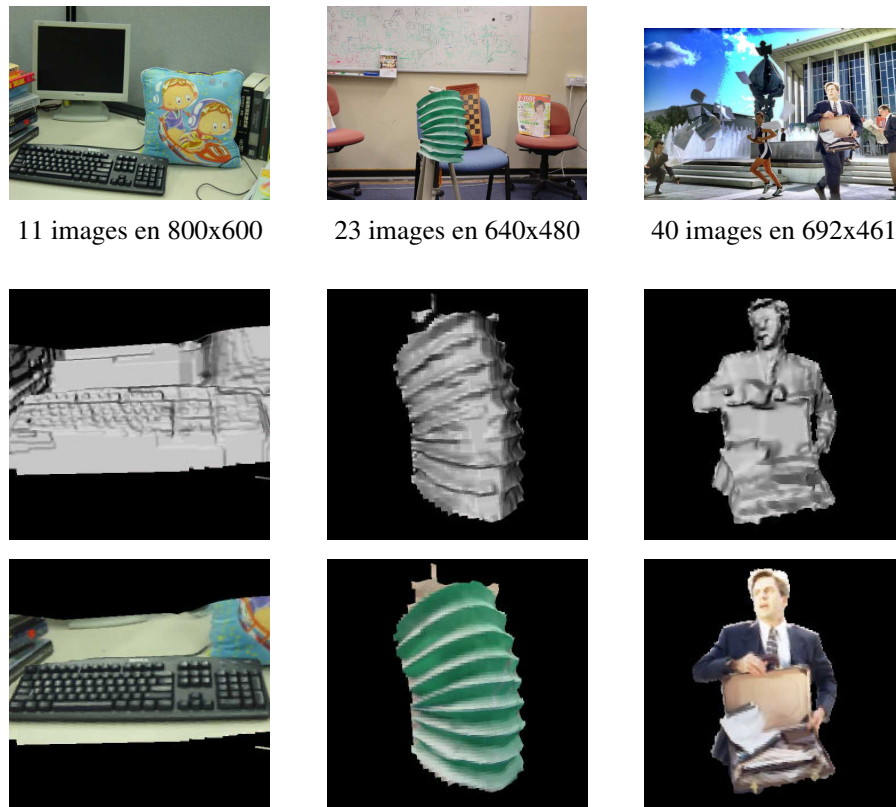


FIG. 6 – Résultats sur trois séquences d'images. La première ligne présente une image, la résolution et la longueur de la séquence, la deuxième montre le modèle obtenu sans texture et la troisième le modèle avec texture.

La phase d'optimisation pour le calcul de ces modèles a nécessité de 30 minutes à presque 2 heures selon les modèles sur un processeur MIPS R12000 à 400MHz et un espace mémoire de 300 méga-octets à 700 méga-octets. Ces chiffres qui peuvent paraître importants sont à relativiser sachant que l'optimisation se fait sur un espace contenant de 1 à 10 millions de voxels et que chaque voxel introduit dans le graphe 5 sommets et 24 arcs (voir la figure 4-gauche). De plus, en remarquant que le nombre d'arcs est proportionnel à celui de sommets, le calcul de la coupure minimale est en  $\mathcal{O}(n^{2,5})$  [CG97]. Bien qu'il soit souvent difficile de connaître la taille des graphes utilisés, à notre connaissance, les implémentations actuelles ne dépassent l'ordre de grandeur de 100 000 sommets et 300 000 arcs [KZ02a].

## Implémentation

Pour traiter de tels graphes, nous avons apporté une attention particulière à la gestion de la mémoire :

- les relations de voisinage entre sommets et arcs ne sont pas stockées mais calculées à chaque requête,
- seules les fonctions  $c$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont stockées ce qui évitent de stocker la capacité de chaque arc,
- un arc double  $(s_1, s_2)$  permet normalement au flot de "tourner" : il peut exister un flot non nul de  $s_1$  vers  $s_2$  et de  $s_2$  vers  $s_1$ , en supprimant la partie "tournante" de ce flot, on peut stocker les flots des deux arcs qui composent  $(s_1, s_2)$  sur une seule variable, le signe indiquant la direction du flot.

Nous avons aussi implémenté les heuristiques proposées par Cherkassky et al. [CG97] ce qui nous a permis d'atteindre des temps de calcul inférieurs à 24 heures.

## 7 Conclusion

Nous venons de décrire une nouvelle technique d'optimisation qui s'applique à un ensemble d'énergies que nous avons caractérisé. Cette technique apporte les contributions suivantes :

- une formulation continue du problème à résoudre exhibant le rôle de la géométrie de la configuration,
- la résolution exacte d'une discrétisation de ce problème,
- la mise en évidence d'ambiguïtés ainsi qu'une technique pour les résoudre,
- un graphe original pour représenter certaines fonctions de pénalité convexes,
- l'application de ces résultats à problème d'acquisition 3D à partir d'une courte séquence d'images grâce à une implémentation supportant des graphes de taille très importante.

Grâce à cette méthode nous avons montré que nous pouvons construire des modèles tridimensionnels avec une précision supérieure à celle offerte classiquement par les cartes de disparité et sur des modèles qui nécessitent un volume important de données.

### Travaux futurs

Nous pensons que la méthode peut encore être améliorée pour encore mieux reconstruire les surfaces courbes. Nous souhaitons aussi explorer plus précisément les extensions que nous proposons dans la section 4.4.

## Références

- [Bel57] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton University Press, 1957.
- [BGCM02] C. Buehler, S. Gortler, M. Cohen, and L. McMillan. Minimal surfaces for stereo. In *ECCV*, 2002.
- [CG97] B. Cherkassky and A. Goldberg. On implementing the push-relabel method for the maximum flow problem. *Algorithmica*, 19(4) :390–410, 1997.
- [FF62] L. Ford and D. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.
- [FK98] Olivier Faugeras and Renaud Keriven. Variational principles, surface evolution, PDE's, level set methods and the stereo problem. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998.
- [GR97] A. Goldberg and S. Rao. Length functions for flow computations. Technical Report 97-055, NEC Research Institute, Inc., 1997.
- [IB94] S. Intille and A. Bobick. Disparity-space images and large occlusion stereo. In *ECCV*, 1994.
- [Ish00] H. Ishikawa. *Global Optimization Using Embedded Graphs*. PhD thesis, New York University, 2000.
- [KPV98] R. Koch, M. Pollefeys, and L. Van Gool. Multi viewpoint stereo from uncalibrated video sequences. *Lecture Notes in Computer Science*, 1406, 1998.
- [KS99] K. Kutulakos and S. Seitz. A theory of shape by space carving. In *ICCV*, 1999.
- [KZ01] V. Kolmogorov and R. Zabih. Computing visual correspondence with occlusions using graph cuts. In *ICCV*, 2001.
- [KZ02a] V. Kolmogorov and R. Zabih. Multi-camera scene reconstruction via graph cuts. In *ECCV*, 2002.
- [KZ02b] V. Kolmogorov and R. Zabih. What energy functions can be minimized via graph cuts ? In *ECCV*, 2002.
- [OK85] Y. Ohta and T. Kanade. Stereo by intra- and inter-scanline search using dynamic programming. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 7 :139–154, 1985.
- [OK93] M. Okutomi and T. Kanade. A multiple-baseline stereo. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(4) :353–63, 1993.
- [PS02] S. Paris and F. Sillion. Robust acquisition of 3d informations from short image sequences. In *Pacific Graphics*, 2002.
- [RC98] S. Roy and I. Cox. A maximum-flow formulation of the n-camera stereo correspondence problem. In *ICCV*, 1998.
- [SCMS01] G. Slabaugh, B. Culbertson, T. Malzbender, and R. Schafer. A survey of methods for volumetric scene reconstruction from photographs. In *VolumeGraphics*, 2001.
- [UKG98] M. Ulvklo, H. Knutsson, and G. Granlund. Depth segmentation and occluded scene reconstruction using ego-motion. *Proc. SPIE Vol. 3387, p. 112-123, Visual Information Processing VII*, 1998.
- [Vek99] O. Veksler. *Efficient Graph-Based Energy Minimization Methods in Computer Vision*. PhD thesis, Cornell University, 1999.